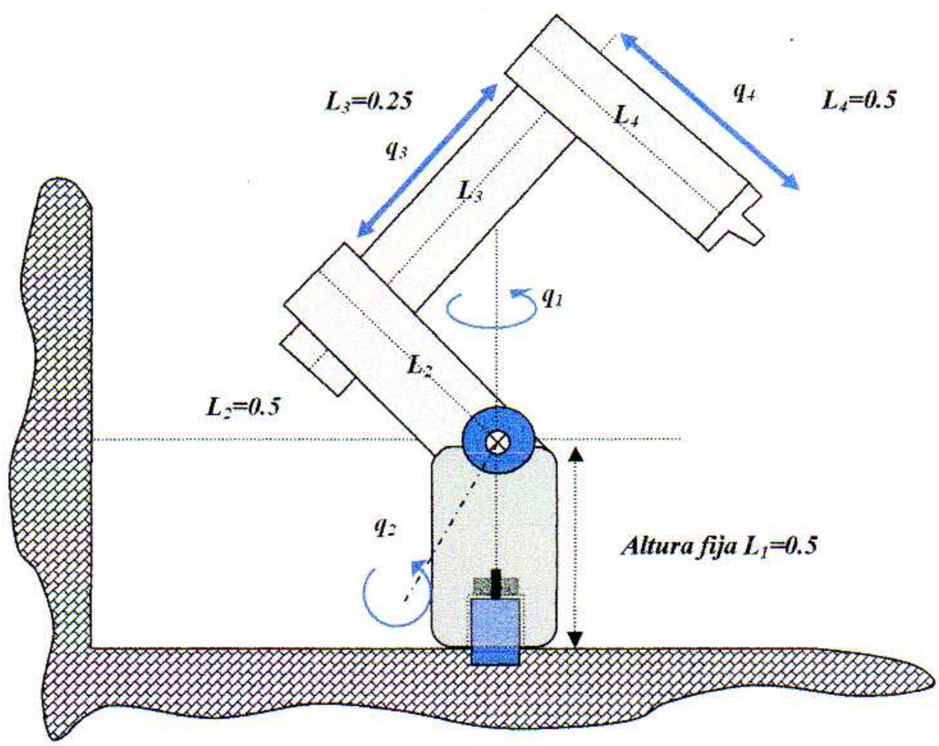
Nombre:
Carnet:

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
ROBOTICA
EC-3514

Sartenejas, Miércoles 17 de Mayo de 2006

1^ER PARCIAL RECUPERACIÓN

1) La figura anexa presenta un diagrama esquemático de un Robot Antropomorfo modificado, al cual se le ha agregado un movimiento traslacional adicional; este robot es empleado en el montaje de componentes electrónicos. Encuentre:
   a) Determine de manera aproximada el espacio de trabajo del manipulador. (Forma y medidas) (3 puntos)
   b) Determine las ecuaciones cinemáticas directas (función de q1, q2, q3 y q4) del manipulador utilizando la notación de Denavit-Hartenberg. (16 puntos)
   c) Considere un punto genérico en el espacio de trabajo $P=[P_x\ P_y\ P_z]$. Cuantas soluciones posibles existen. Justifique su respuesta. Determine las ecuaciones cinemáticas inversas para la base del elemento terminal. si se impone la restricción de $q_4=L_2$. (9 puntos)
   d) Determine la matriz Jacobiana del robot manipulador. (7 puntos)



Respuestas

a) Para determinar el espacio de trabajo del manipulador es necesario en primer lugar definir "restricciones" para las variables de articulación q_i. Se puede asumir lo siguiente (cualquier otra asunción es válida)

q_1 es un ángulo que varía entre 0° y 360° (Puede dar una vuelta completa)

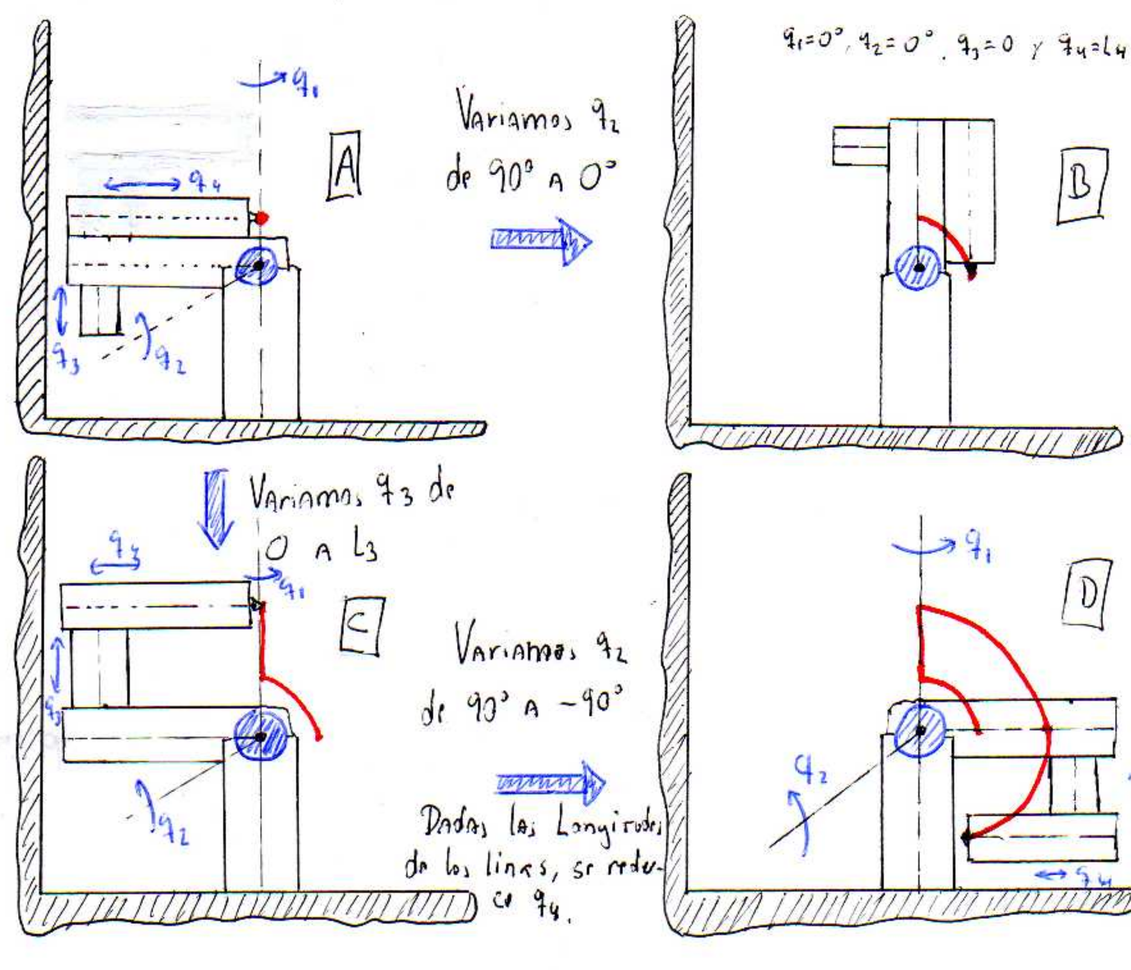
q_2 es un ángulo que varía entre −90° y 90° ó de 0° a 90° y de 270° a 360°
($q_2 = 0° \Rightarrow$ link 2 vertical)

q_3 varía de 0 a l_3

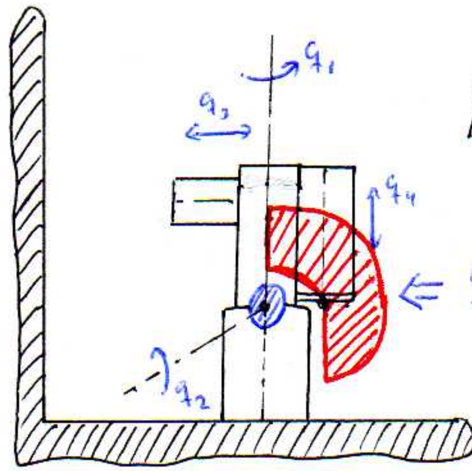
q_4 varía de 0 a l_4

Dado que q_1 hace girar al elemento final alrededor de su eje de giro (vertical), el espacio de trabajo será un "sólido de revolución" cuya sección transversal debemos determinar:

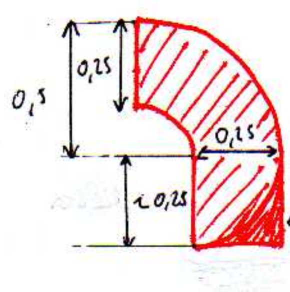
Consideremos $q_1 = 0°$, $q_2 = 90°$, $q_3 = 0$ y $q_4 = L_4$



Combinando variaciones de q_2, q_3 y q_4 es posible desplazar el elemento final pegado a la base

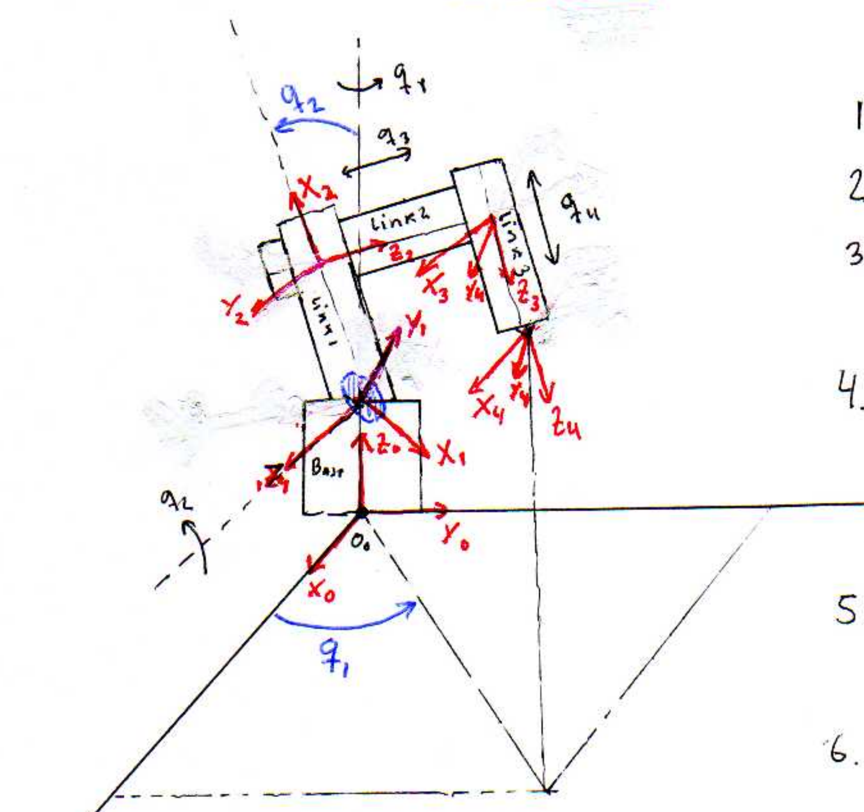


Finalmente el espacio de trabajo es un "sólido de revolución con la siguiente sección transversal:



Se obtiene si a partir de $\boxed{D}$ variamos q_4 hasta hacerla 0 y luego se varía q_3 de l_3 a 0

b)



1. Numeramos los links de 1 al n
2. Identificamos los ejes de movimiento
3. Definimos las variables de articulación de q_1 a q_n
4. Sobre cada eje de movimiento colocamos un Z_i. En el eje 1 colocamos Z_0 que es fijo
5. Sobre Z_0 y en cualquier lugar ubicamos O_0
6. Elegimos X_0 y Y_0 como un sistema diestro
7. Para elegir el origen de sistema i-ésimo consideramos.

a) z_0 y z_1 son coplanares y se intersectan

Escogemos O_1 en la intersección. X_1 es <u>normal</u> al plano que forman z_0 y z_1

b) z_1 y z_2 no son coplanares

Existe una única recta normal a ambos ejes que define la distancia mínima entre ellos (en este caso la línea que pasa por el centro del link 1). Esta línea define X_2 y en su intersección con z_2 se define O_2

c) z_2 y z_3 son coplanares y se intersectan

Escogemos O_3 en la intersección. X_3 es <u>normal</u> al plano que forman z_2 y z_3.

d) El Sistema de Ref 4 es el Sist. de Ref 3 desplado en z_3 una distancia q_4

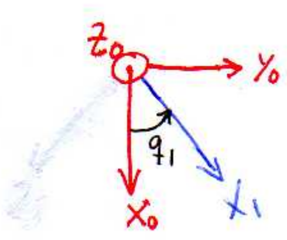
Recordando: θ_i: Ángulo entre X_{i-1} y X_i visto desde z_{i-1}

d_i: Distancia desde O_{i-1} a la intersección entre X_i y z_{i-1} medida a lo largo de z_{i-1}

α_i: Ángulo entre z_{i-1} y z_i visto desde X_i

a_i: Distancia desde O_i a la intersección entre X_i y z_{i-1} medida a lo largo de X_i

θ_1: Visto desde el eje z_0 tenemos

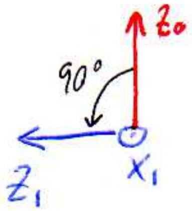


$$\theta_1 = +q_1$$

d_1 $\quad X_1$ y Z_0 se intersecan en $O_1 \Rightarrow d_1$ es la distancia entre O_0 y O_1

$\Rightarrow d_1 = L_1$ (Alto de la base)

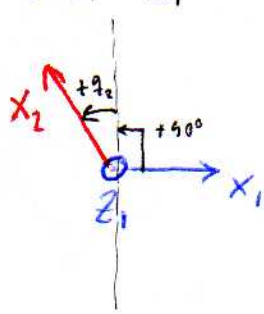
α_1 $\quad$ Visto desde X_1



$\alpha_1 = +90°$

a_1 $\quad$ La intersección entre X_1 y Z_0 ocurre en O_1. La distancia de O_1 a O_1 es cero $\Rightarrow a_1 = \emptyset$

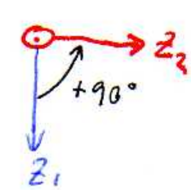
θ_2 $\quad$ Visto desde Z_1



$\Rightarrow \theta_2 = 90° + q_2$

d_2 $\quad X_2$ y Z_1 se intersecan en O_1. La distancia de O_1 a O_1 es cero $\Rightarrow d_2 = \emptyset$

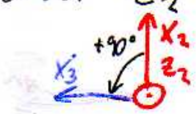
α_2 $\quad$ Visto desde X_2



$\Rightarrow \alpha_2 = 90°$

a_2 $\quad X_2$ y Z_1 se intersecan en O_1. La distancia de O_2 a O_1 es $L_2 \Rightarrow a_1 = L_2$

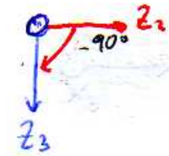
θ_3 Visto desde Z_2



$\Rightarrow \theta_3 = +90°$

d_3 X_3 y Z_2 se intersectan en O_3. La distancia de O_2 a O_3 es q_3 $\Rightarrow d_3 = q_3$

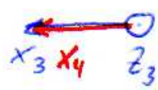
α_3 Visto desde X_3



$\Rightarrow \alpha_3 = -90°$

a_3 X_3 y Z_2 se intersectan en O_3. La distancia de O_3 a O_3 es $\emptyset$ $\Rightarrow a_3 = \emptyset$

θ_4 Visto desde Z_3



$\Rightarrow \theta_4 = \emptyset°$

d_4 X_4 y Z_3 se intersectan en O_4. La distancia de O_3 a O_4 es q_4 $\Rightarrow d_4 = q_4$

α_4 Visto desde X_4

$\Rightarrow \alpha_4 = \emptyset°$

a_4 X_4 y Z_3 se intersectan en O_4. La distancia de O_4 a O_4 es cero $\Rightarrow a_4 = \emptyset$

Finalmente

i	θ_i	d_i	α_i	a_i
1	q_1	L_1	90°	$\emptyset$
2	$90°+q_2$	$\emptyset$	90°	L_2
3	90°	q_3	-90°	$\emptyset$
4	$\emptyset$	q_4	$\emptyset$	$\emptyset$

Conocidos los parámetros de Denavit - Hartenberg podemos obtener la matriz de transformación homogénea A_{i-1}^{i} de la siguiente manera:

$$A_{i-1}^{i} = \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i C\alpha_i & S\theta_i S\alpha_i & a_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\theta_i C\alpha_i & -C\theta_i S\alpha_i & a_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego:

$$A_0^1 = \begin{bmatrix} Cq_1 & 0 & Sq_1 & 0 \\ Sq_1 & 0 & -Cq_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_1^2 = \begin{bmatrix} -Sq_2 & 0 & Cq_2 & -L_2 Sq_2 \\ Cq_2 & 0 & Sq_2 & L_2 Cq_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$* \ \text{sen}(90° + q_2) = \overset{1}{\cancel{\text{sen}\,90°}} \cdot \cos q_2 + \overset{0}{\cancel{\cos 90°}} \cdot \text{sen}\, q_2 = \cos q_2$

$\cos(90° + q_2) = \overset{0}{\cancel{\cos 90°}} \cos q_2 - \overset{1}{\cancel{\text{sen}\,90°}} \, \text{sen}\, q_2 = -\text{sen}\, q_2$

$$A_2^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_3^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_0^4 = A_0^1 \times A_1^2 \times A_2^3 \times A_3^4$$

$$A_0^2 = A_0^1 \times A_1^2 = \begin{bmatrix} -Cq_1 Sq_2 & Sq_1 & Cq_1 Cq_2 & -L_2 Cq_1 Sq_2 \\ -Sq_1 Sq_2 & -Cq_1 & Sq_1 Cq_2 & -L_2 Sq_1 Sq_2 \\ Cq_2 & 0 & Sq_2 & L_1 + L_2 Cq_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_0^3 = A_0^2 \times A_2^3 = \begin{bmatrix} Sq_1 & -Cq_1Cq_2 & Cq_1Sq_2 & q_3Cq_1Cq_2 - L_2Cq_1Sq_2 \\ -Cq_1 & -Sq_1Cq_2 & Sq_1Sq_2 & q_3Sq_1Cq_2 - L_2Sq_1Sq_2 \\ 0 & -Sq_2 & -Cq_2 & q_3Sq_2 + L_1 + L_2Cq_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego:

$$A_0^4 = A_0^3 \times A_3^4 = \begin{bmatrix} Sq_1 & -Cq_1Cq_2 & Cq_1Sq_2 & q_3Cq_1Cq_2 + (q_4-L_2)Cq_1Sq_2 \\ -Cq_1 & -Sq_1Cq_2 & Sq_1Sq_2 & q_3Sq_1Cq_2 + (q_4-L_2)Sq_1Sq_2 \\ 0 & -Sq_2 & -Cq_2 & q_3Sq_2 + L_1 + (q_4+L_2)Cq_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La posición del elemento final con respecto al Sist. de Ref. 4 es

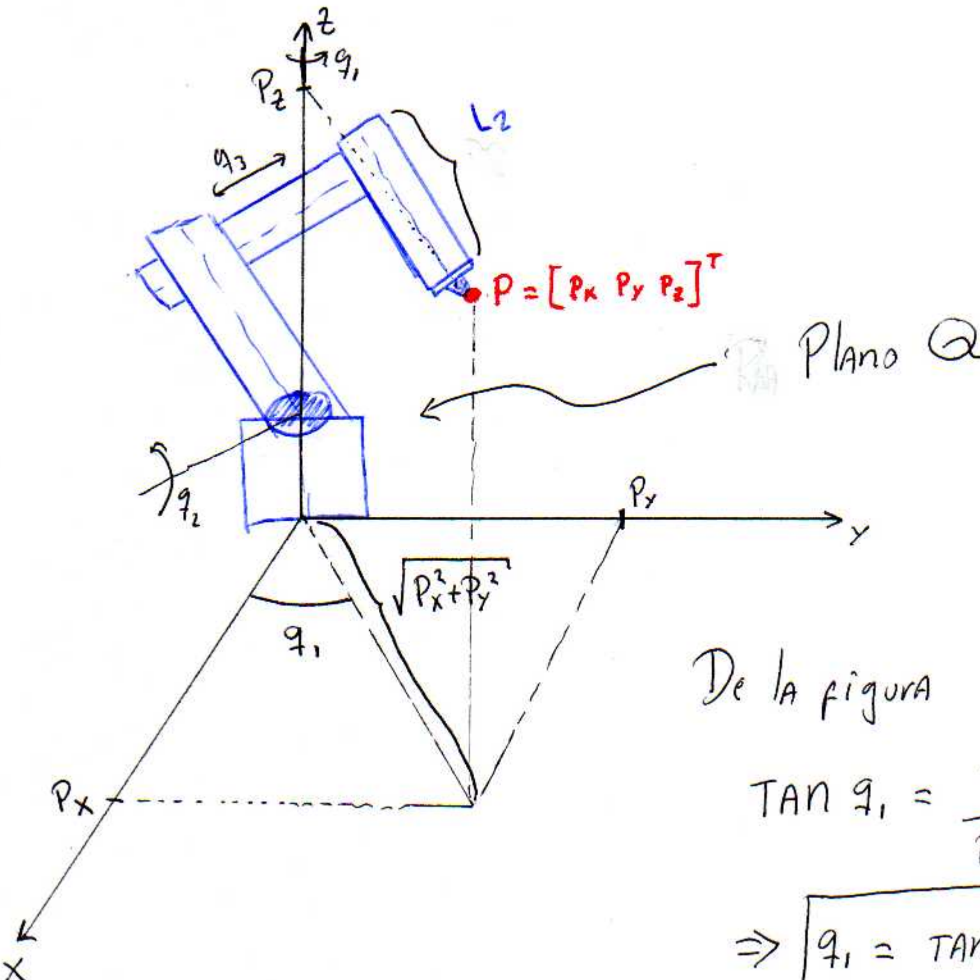
$$\vec{P}_{4_{3\times1}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para saber las coordenadas de $\vec{P}_4$ en el Sist de Ref. 0 utilizamos la expresión

$$\vec{P}_{0_{4\times1}} = A^4_{0_{4\times4}} \times \vec{P}_{4_{4\times1}} \Rightarrow \vec{P}_0 = A_0^4 \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{P}_0 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_3Cq_1Cq_2 + (q_4-L_2)Cq_1Sq_2 \\ q_3Sq_1Cq_2 + (q_4-L_2)Sq_1Sq_2 \\ q_3Sq_2 + L_1 + (q_4+L_2)Cq_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

c)

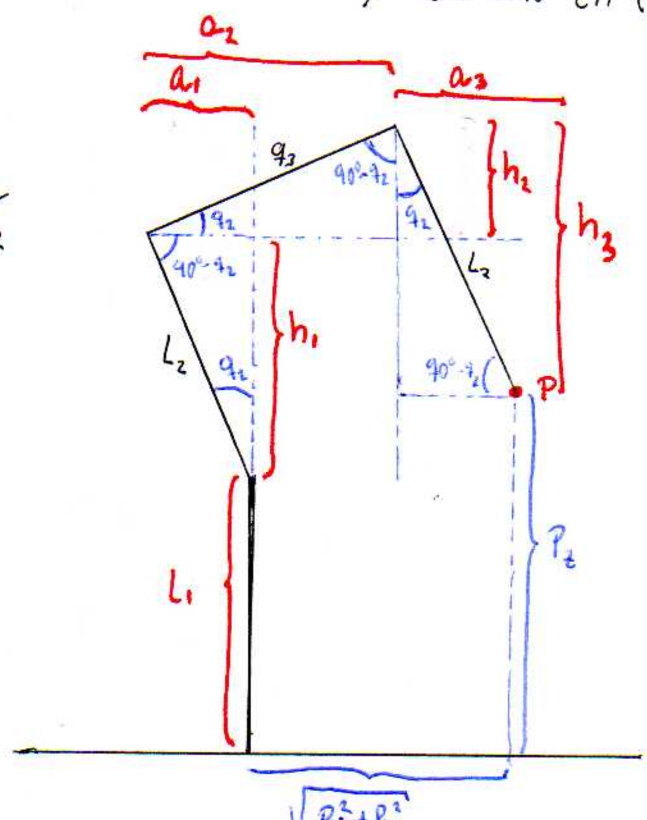


De la figura

$$\tan q_1 = \frac{P_y}{P_x}$$

$$\Rightarrow \boxed{q_1 = \tan^{-1} \frac{P_y}{P_x}}$$

Supongamos los eslabones como líneas y veámoslo en el plano Q



$$P_z = L_1 + h_1 + h_2 - h_3$$

$$P_z = L_1 + \cancel{L_2 C q_2} + q_3 S q_2 - \cancel{L_2 C q_2}$$

$$P_z = L_1 + q_3 \, S q_2$$

$$q_3 \, S q_2 = P_z - L_1 \quad (1)$$

Por otro lado

$$\sqrt{P_x^2+P_y^2} = a_3 + a_2 - a_1$$

$$\sqrt{P_x^2+P_y^2} = \cancel{L_2 S q_2} + q_3 C q_2 - \cancel{L_2 S q_2}$$

$$\sqrt{P_x^2+P_y^2} = q_3 \, C q_2 \quad (2)$$

Dividiendo ① entre ②

$$\frac{\cancel{q_3}\, s q_2}{\cancel{q_3}\, c q_2} = \frac{P_z - L_1}{\sqrt{P_x^2 + P_y^2}}$$

$$\tan q_2 = \frac{P_z - L_1}{\sqrt{P_x^2 + P_y^2}} \Rightarrow \boxed{q_2 = \tan^{-1}\left(\frac{P_z - L_1}{\sqrt{P_x^2 + P_y^2}}\right)} \quad ③$$

Sust. ③ en ①

$$q_3 \cdot \operatorname{sen}\left(\tan^{-1}\left(\frac{P_z - L_1}{\sqrt{P_x^2 + P_y^2}}\right)\right) = P_z - L_1$$

$$\Rightarrow \boxed{q_3 = \frac{P_z - L_1}{\operatorname{sen}\left(\tan^{-1}\left(\frac{P_z - L_1}{\sqrt{P_x^2 + P_x^2}}\right)\right)}}$$

Ejercicio: ¿Cuantas soluciones existen para un punto P cualquiera? Justifique

d) Esta parte de la materia no se ha visto.